

РАЗРАБОТКА ПОДХОДОВ И МОДЕЛЕЙ ДЛЯ АНАЛИЗА ДИНАМИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ И ОПТИМИЗАЦИИ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ КОНСТРУКЦИЙ (ПОДШИПНИКОВЫХ УЗЛОВ КАЧЕНИЯ)

Э. А. СИМСОН, С. А. НАЗАРЕНКО, НТУ "ХПИ"

Постановки проблем и основные этапы оптимизации многокомпонентных тел и технологических систем для обработки неоднородных материалов

Исследования по оптимальному проектированию многокомпонентных тел и технологических систем для обработки неоднородных материалов начнем с процесса формулировки задачи (рис. 1). Постановка проблемы состоит из следующих стадий [8, 11, 12, 14]:

1. определение объекта оптимизации и выбор математических моделей его анализа;
2. выбор варьируемых параметров \vec{u} в пространстве поиска;
3. определение функционала качества (критерия цели) $J(\vec{u}, \vec{y})$ и ограничений для оптимизируемого объекта.

Задача оптимизации как многокомпонентных тел, так и технологических систем для обработки неоднородных материалов состоит в определении варьируемых переменных \vec{u} , относящихся к допустимой области и максимизирующих (минимизирующих) функционал качества (критерий цели) $J(\vec{u}, \vec{y})$ [8, 12].

Функция (вектор) переменных состояния \vec{y} , как многокомпонентных тел, так и технологических систем для обработки неоднородных материалов, может включать температуры, перемещения, деформации и т. д..

При решении задач оптимизации, как многокомпонентных тел, так и технологических систем для обработки неоднородных материалов, в качестве варьируемых переменных \vec{u} рассматриваются физико-механические свойства материалов (углы укладки волокон, число слоев и т. д.); геометрические параметры (распределения толщины; конфигурация граничного контура, вырезов, срединной поверхности и т. д.); сосредоточенные жесткости и массы (стрингеры, шпангоуты и т.д.); численность, величина и область приложения управляющих нагрузок и т. д. [8, 11].

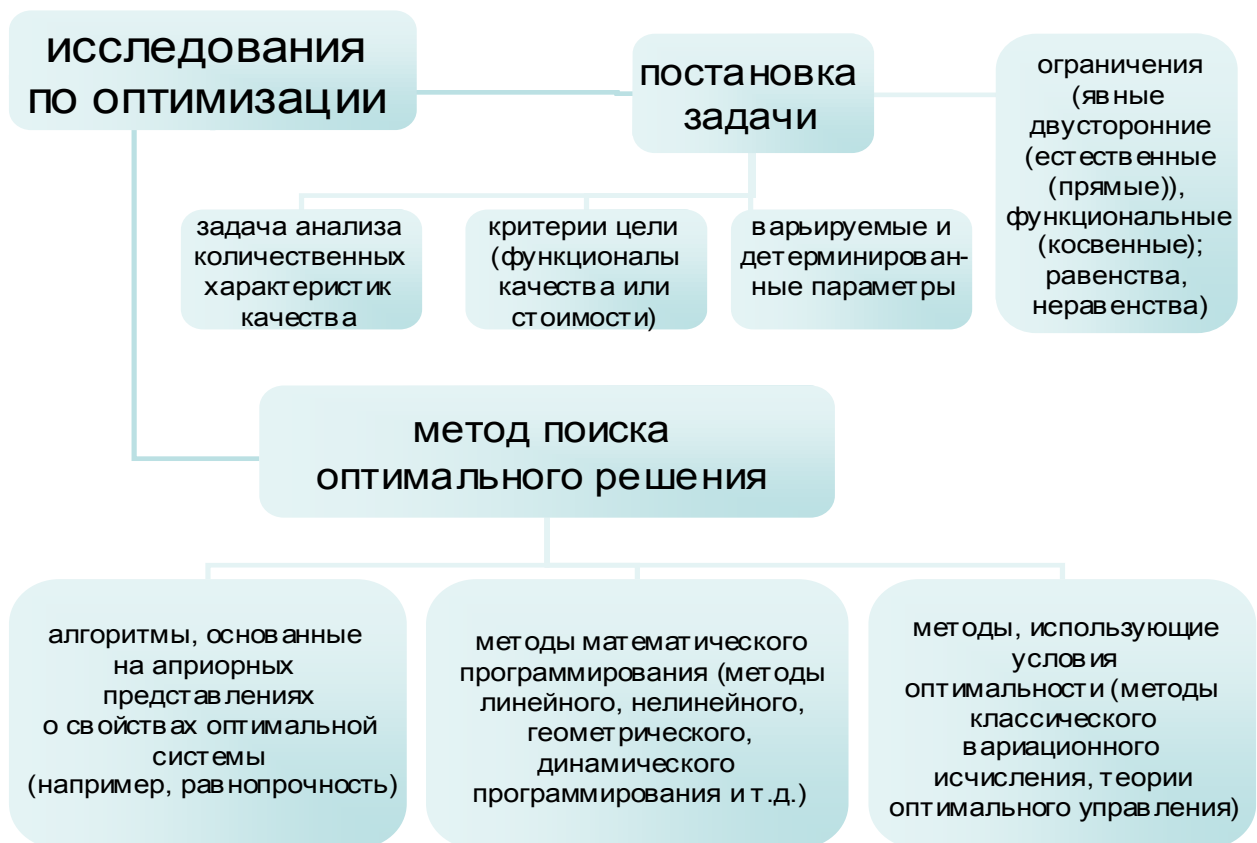
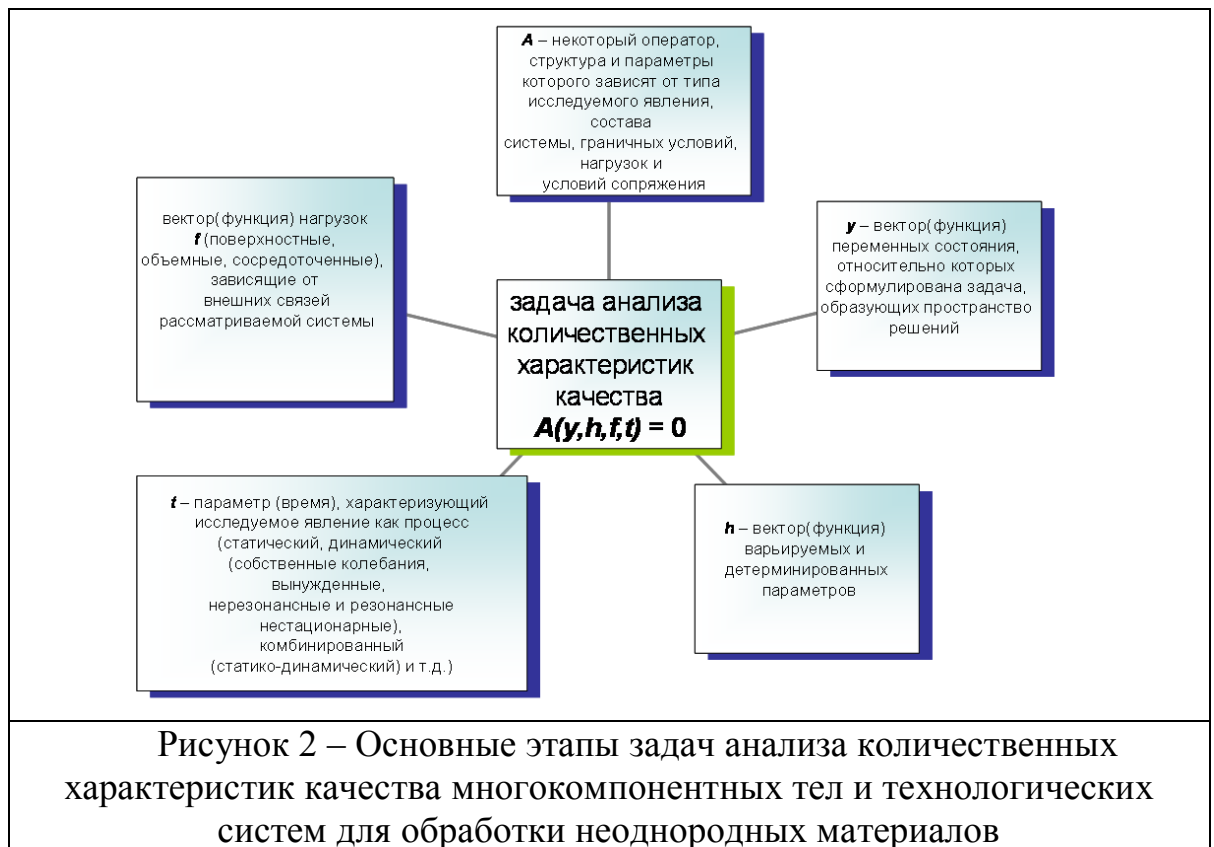


Рисунок 1 – Основные этапы оптимизации многокомпонентных тел и технологических систем для обработки неоднородных материалов.

На проектные переменные \vec{y} могут накладываться как функциональные ограничения типа равенств и неравенств (максимально допустимые напряжения, собственные частоты, вес и т.д.), неявным образом сужающие область варьирования, так и явные двусторонние ограничения, задаваемые из конструктивно-технологических представлений. Подобные ограничения могут иметь и стохастическую постановку [8, 11, 12].

Критерий качества $J(\vec{y}, \vec{y})$, как многокомпонентных тел, так и технологических систем для обработки неоднородных материалов, представляет математическую формулировку цели оптимизации, зависящую от условий эксплуатации и функционального предназначения. Качество, как многокомпонентных тел, так и технологических систем для обработки неоднородных материалов, описывается определенными функционалами, характеризующихся, как правило, нелинейными зависимостями от переменных состояния и варьируемых параметров [8].

Значения функционалов, как многокомпонентных тел, так и технологических систем для обработки неоднородных материалов определяются из решения задач анализа, описываемых уравнениями состояния (рис. 2).



Классификация подходов к решению задач оптимизации многокомпонентных структур с учетом технологической наследственности (на примере подшипников качения)

При решении задач оптимизации, как многокомпонентных конструкций, так и технологических систем для обработки неоднородных материалов; необходимо учитывать различные виды нелинейностей (физических; геометрических; контактных; “наследственных” (“генетических”), связанных с учетом прогрессивного накопления повреждений материалов; появляющимися на одном технологическом этапе полями и передающимися на последующие и прочих) [8, 11, 12].

При создании математических моделей систем для обработки неоднородных материалов, надо учитывать проблему технологической наследственности и стохастический характер распределения погрешностей материалов и формы, появляющимися на всевозможных этапах производства, что обуславливает необходимость применения моделирования, при котором математически воссоздается во времени процесс функционирования [8]. При этом имитируются элементарные компоненты с сохранением логической структуры и последовательности.

Это позволяет по исходным данным в нужные моменты времени получить информацию о характеристиках, как многокомпонентных тел, так и технологических систем для обработки неоднородных материалов.

На технологических многостадийных этапах “формирования и сборки” конкурентоспособной конструкции (например, литье, прокатка, экструзия, прессование, вырубка, формовка, штамповка, ковка, гибка, сварка, клейка, пайка и т. д.) может реализовываться концепция MultiStage [1, 8, 9, 12].

Например, ключевыми технологическими стадиями производства колец подшипников являются: индукционный нагрев цилиндрический заготовки, горячая объемная штамповка (осадка, формовка, прошивка) и раскатка кольца [8, 9].

Задача воздействия технологической наследственности формообразования на показатели качества рабочих поверхностей подшипников в структуре их жизненного цикла проанализирована в работах [2, 3].

Ключевыми обстоятельствами технологической наследственности является нахождение количественного аспекта переноса от предыдущей операции к последующим назначенного свойства.

Наследственная часть погрешности может оказаться относительно незначительной при изготовлении машиностроительных деталей нормальной точности [10]. Традиционные погрешности, типичные для большинства технологических процессов изготовления деталей, будут основными.

Наследственная часть допуска бывает соизмеримой с допуском и даже превосходит его, когда допустимые погрешности должны быть незначительными по размеру. Их ликвидация представляется достаточно сложной технологической проблемой. Таким образом, закономерности технологического наследования надо применять главным образом в прецизионном машиностроении.

На этапе проектирования для конструктора наследственная часть погрешности не является априорно известной количественно. В лучшем случае наличествует только статистика потенциальных разбросов технологических отклонений. Таким образом, существенной проблемой является оценка возможных разбросов динамических или прочностных функционалов для многокомпонентных конструкций, что может привести к необходимости считать параметры расстройки технологических отклонений случайными величинами и производить анализ в вероятностном смысле.

На основании проведенных исследований сделаем вывод о том, что при оптимизации многокомпонентных конструкций в условиях изготовления

с учетом технологической наследственности вместо детерминированного критерия $\min J(\vec{u}, \vec{y})$ может рассматриваться оценка функционала по наихудшему отклонению в рамках допусков d_i :

$$\min_{u_i} \max_{|\Delta u_i| < d} J(\vec{u} + \Delta \vec{u}, \vec{y} + \Delta \vec{y})$$

заменяемая при использовании на основе гамильтонианов H для анализа чувствительности [7] на

$$\min_{u_i} (J(\vec{u}, \vec{y}) + \sum_i |H'_{u_i}| d_i),$$

или по среднестатистическому отклонению

$$\min_{u_i} (J(\vec{u}, \vec{y}) + 3(\sum_{i,j} H'_{u_i} H'_{u_j} r_{ij} \sigma_i \sigma_j)^{1/2}).$$

При наличии достаточного технико-экономического анализа цикла “формирования и сборки” MultiStage [1, 8], может быть решена задача оптимального назначения допусков с учетом технологической наследственности при минимальной стоимости изготовления

$$\min_{d_i} S(d_i, \vec{u})$$

при ограничениях на наихудшие (в рамках допусков) отклонения динамических или прочностных функционалов

$$J_j \pm \sum_i |H'_{j,u_i}| d_i \in [\bar{J}_j \pm \Delta J_j].$$

Аналогично могут быть поставлены задачи на наихудшие отклонения при эксплуатации динамических или прочностных функционалов при изменении геометрических и физических параметров многокомпонентных конструкций и технологических систем для обработки неоднородных материалов. Большую роль для решения проблем, изложенных в данном параграфе, может сыграть анализ чувствительности [5-7].

Анализ прочности и динамики подшипника качения как поворотной (циклически) симметричной конструкции

Подшипники качения будем рассматривать как многокомпонентную связанную систему при нелинейной изменяемости характеристик материалов

с учетом технологической наследственности, возникающей при их изготовлении [13]. Наличие симметрии с позиции расчета дает существенные преимущества, позволяя свести задачу к анализу модели одного сектора с наложенными условиями цикличности.

Поворотом (циклически) симметричную конструкцию (ЦСК) можно представить в виде N секторов, геометрические и физические параметры которых сохраняют инвариантность при повороте относительно оси вращения на любой угол, кратный

$$\gamma = 2\pi/N.$$

Порядок симметрии N – число роликов в случае подшипниковых узлов качения (рис. 3, 4).

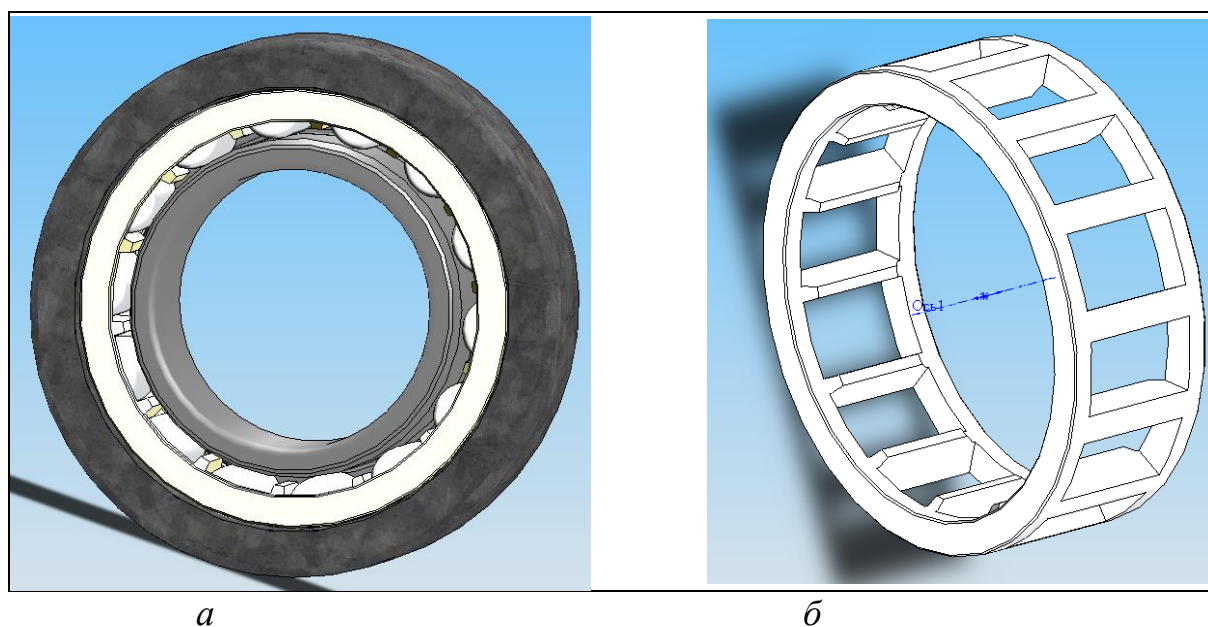


Рисунок 3 – Твёрдотельная модель: *а* – подшипника качения; *б* – сепаратора

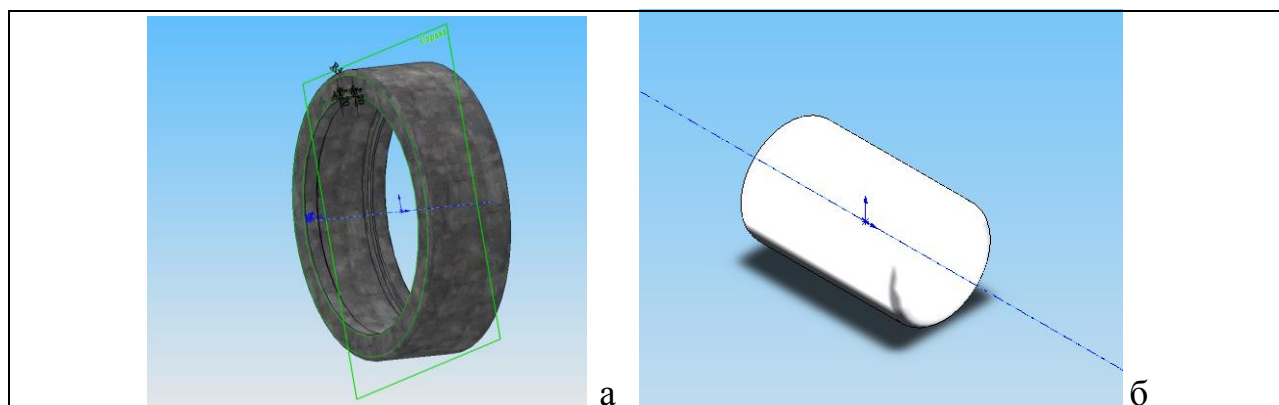


Рисунок 4 – Твёрдотельная модель: *а* – внутреннего кольца с приставным бортиком; *б* – ролика

Для анализа будем использовать метод конечных элементов (МКЭ), считающийся наиболее универсальной и мощной технологией моделирования сложных конструкций и адаптированный к обстоятельствам поворотной симметрии. МКЭ позволяет учесть кинематические ограничения, сложную геометрию объемной модели подшипников качения, распределение нагрузок и физических свойств материалов [13, 15].

Для геометрического представления ЦСК достаточно построить аппроксимирующую геометрическую модель одной типовой подструктуры подшипников качения. Описания остальных получаются из нее преобразованием поворотной симметрии. В общем случае нагружения секторов требуют индивидуальной аппроксимации.

Исследование всей ЦСК основывается на независимом анализе секторов, а затем их связывают в единую систему. Области секторов подшипников качения на своих границах взаимосвязаны при помощи кинематических ограничений, т. е. части взаимодействуют посредством соединений, связывающих соседние сектора, и ограничивают поля возможных перемещений внутри элементов.

Анализ ЦСК начинается с построения модели сектора подшипников качения, на которую наносится конечноэлементная сетка (рис. 5). Так в моделях конструкции колец были учтены: толстые цилиндрические оболочки, приставные бортики, радиусные переходы приставных бортиков в оболочки, фаски.

Вводятся условия закрепления конструкции подшипников качения, а также поворотной симметрии на границах с сопредельными секторами.

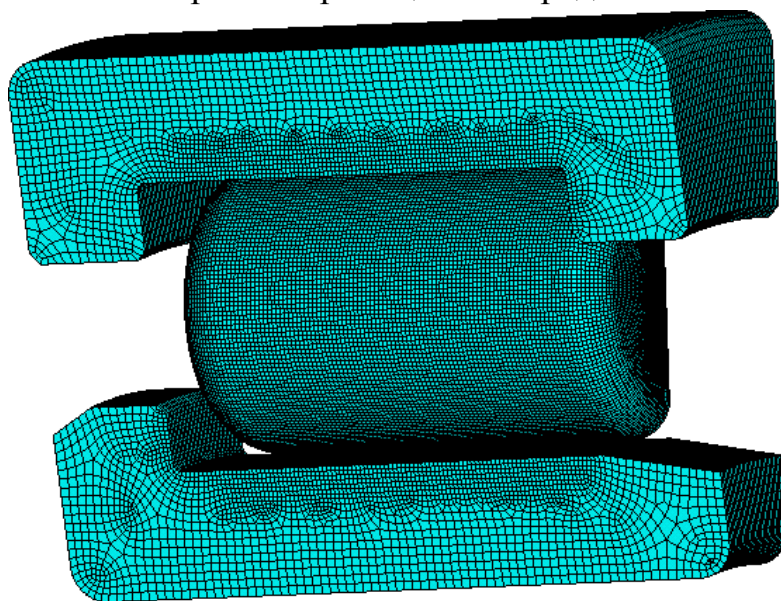


Рисунок 5 – КЭ модель контактирующих фрагментов ролика, внутреннего и внешнего колец с приставными бортиками

Принцип Гамильтона-Остроградского приводит к объединенной вариационной формулировке уравнений поведения конструкции, которая применяется для анализа составных систем подшипников качения [13]. Вначале рассмотрим случай статического нагружения КЭ многокомпонентной модели

$$A(\bar{u}, \bar{y}) = K(\bar{u})\bar{y} - \bar{F}(\bar{u}) = \bar{0}, \quad (1)$$

где $K(\bar{u})$ – матрица жесткости подшипника качения; \bar{F} и \bar{y} – векторы узловых нагрузок и перемещений; \bar{u} – вектор варьируемых параметров.

Блочное уравнение равновесия конечноэлементной модели j – той типовой подструктуры связывает обобщенные перемещения j – го граничного сечения \bar{y}_{1j} , внутренней области сектора \bar{y}_{sj} , $(j+1)$ – го граничного сечения \bar{y}_{2j} с внешними нагрузками \bar{F}_j и внутренними реакциями \bar{q}_{1j} и \bar{q}_{2j} ($j = \overline{1, N}$), замещающими воздействие сопредельных подструктур

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{1s} & K_{12} \\ K_{s1} & K_{ss} & K_{s2} \\ K_{21} & K_{2s} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{y}_{1j} \\ \bar{y}_{sj} \\ \bar{y}_{2j} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_{1j} \\ \bar{F}_{sj} \\ \bar{F}_{2j} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{q}_{1j} \\ 0 \\ \bar{q}_{2j} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

Размерность блоков матрицы жесткости K зависит от числа степеней свободы внутренней и граничной областей сектора подшипника качения. Граничные зоны в зависимости от геометрической формы сектора могут состоять из нескольких несвязных областей.

Для их описания вводится связанная система координат, одна из осей которой направлена вдоль оси циклической симметрии подшипника качения, две другие поворачиваются вокруг нее при переходе от одного сектора к другому на угол γ . При сборке модели j – тая граничная зона совмещает левое сечение j – го сектора и правое сечение $(j-1)$ – го сектора [13].

Связанная система координат позволяет представить глобальную матрицу жесткости ЦСК в квазициклической форме

$$K = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & A_3 \\ A_3 & A_1 & A_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_3 & A_1 & A_2 \\ A_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & A_3 & A_1 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где

$$A_1 = \begin{bmatrix} V_1 K_{11} V_1^T + V_2 K_{22} V_2^T & V_1 K_{1s} \\ K_{s1} V_1^T & K_{ss} \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} V_1 K_{12} V_2 & 0 \\ K_{s2} V_2^T & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = A_2 T, \quad (4)$$

V_1 и V_2 – матрицы перехода от систем координат $(j-1)$ – го и j – го сектора к связанным координатам j – го сечения. Вектор нагрузок имеет вид

$$\vec{F} = \{\vec{F}_j\}_{j=1}^N$$

$$\vec{F}_j = \begin{bmatrix} V_1 \vec{F}_{1j} + V_2 \vec{F}_{2j} \\ \vec{F}_{sj} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Квазициклическая структура позволяет от анализа глобальной системы уравнений ЦСК перейти к решению систем уравнений, размерность которых обуславливается числом обобщенных перемещений внутренней области и граничного сечения сектора подшипника качения:

$$\Lambda_j \vec{\xi}_j = \vec{G}_j, \quad j = \overline{1, t, N}, \quad (6)$$

где $\Lambda_j = A_1 + (A_2 + A_3) \cos \gamma j + i(A_2 - A_3) \sin \gamma j$,

$$\vec{G}_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N (\cos k\gamma j \cdot \vec{F}_k - i \sin k\gamma j \cdot \vec{F}_k),$$

Перемещения \vec{y}_j , соответствующие квазистроке, формируются суперпозицией решений (6) с соответствующими весовыми коэффициентами.

Комплексные системы уравнений (6) в вещественной форме представляют системы уравнений с симметричной матрицей коэффициентов, что позволяет использовать для их реализации стандартное программное обеспечение

$$\begin{bmatrix} \Lambda_j^{\text{Re}} & -\Lambda_j^{\text{Im}} \\ \Lambda_j^{\text{Im}} & \Lambda_j^{\text{Re}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{\xi}_j^{\text{Re}} \\ \vec{\xi}_j^{\text{Im}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{G}_j^{\text{Re}} \\ \vec{G}_j^{\text{Im}} \end{Bmatrix}, \quad j = \overline{1, t, N} \quad (7)$$

Метод квазициклических разложений (МКЦР) позволяет перейти от решения целой системы линейных уравнений многокомпонентной конструкции с неленточной матрицей жесткости к решению $(N/2+1)$ систем линейных уравнений, размерность которых обуславливается числом узлов КЭ элементных моделей: внутренней области сектора и граничного сечения.

Изложенный подход делает допустимым изъятие из полной расчетной модели многокомпонентной конструкции отдельной ее части, перестроение сетки и более доскональный анализ выделенной области.

Эффективность метода можно значительно приумножить суперэлементной сверткой (полной или частичной конденсацией) внутренней области сектора подшипника качения.

Это может повысить эффективность численного моделирования подшипника качения, так как сначала делается анализ грубой сетки, а затем для интересующей области - подсистемы - измельчается сетка и уточняется расчет. Так можно получить более точную информацию для части многокомпонентной конструкции, не увеличивая сложность полной ее модели [13].

Для нерезонансных задач динамики ЦСК (когда частота гармонического нагружения ω достаточно удалена от ближайших собственных частот, а также можно пренебречь силами малого внутреннего трения) применение МКЦР отличается только физическим значением матрицы коэффициентов, которая в этом случае является матрицей динамической жесткости $K_d = K - \omega^2 M$, где M – матрица масс, ω – частота вынуждающей силы.

Из решения обобщенного уравнения колебаний многокомпонентных структур с учетом нелинейных диссипативных эффектов видно, что выражения, входящие в уравнение резонансной кривой, представляют функционалы, зависящие от резонирующей собственной частоты и формы колебаний [12].

При решении спектральной проблемы ЦСК на основе сектора возможны разнообразные комбинации МКЦР и блочной (или обратной) итерации, обуславливающие различно сформированные группы частот и форм.

Решение задачи в первом варианте повторяет схему (2) – (7), где матрица коэффициентов в уравнениях (2) представляет матрицу динамической жесткости K_d сектора, нагружение сектора – $\vec{F}_j \equiv 0$, ω – искомые собственные частоты. Тогда (6) преобразуется в систему однородных уравнений.

Итерационный метод решения проблемы собственных значений позволяет найти относящиеся к каждому j – му параметру цикличности спектры частот ω_{jk} , $j = \overline{1, t, N}$. Отметим, что при подобном подходе неосуществим упорядоченный поиск заданной частоты.

Собственные формы ЦСК для ω_{jk} имеют вид

$$\vec{y}^{(jk)} = \{\vec{y}_n^{(jk)}\}_{n=1}^N = \left\{ \cos j \cdot n\gamma \cdot \vec{\xi}_{kj}^{\text{Re}} - \sin j \cdot n\gamma \cdot \vec{\xi}_{kj}^{\text{Im}} \right\}_{n=1}^N$$

Вторая схема предполагает включение МКЦР "внутри" алгоритма блочной итерации решения спектральной проблемы ЦСК (на этапе итерационного преобразования подпространства) [12]. Подход позволяет отыскивать нижнюю часть спектра подшипников качения (либо пакет частот, ближайших к заданному значению, при использовании "сдвигки") вне зависимости от принадлежности соответствующих собственных форм тому или иному параметру цикличности.

В этом варианте метод итерации подпространства применяется к глобальной модели конструкции подшипника качения в связанной системе координат

$$KY = MX.$$

Для матрицы начальных приближений $X^0 = \{X_j^0\}_{j=1}^N$ формирование правой части $F = MX^0$ складывается посекторно

$$F = \{F_j\}_{j=1}^N = \{M_1 X_{j-1} + M_2 X_j + M_3 X_{j+1}\}_{j=1}^N;$$

($X_0 = X_N$), ($Y_{N+1} = Y_1$), где структура M_1 , M_2 , M_3 аналогична A_1 , A_2 , A_3 в формулировках (4).

После того как матрица правых частей сформирована, вычисления проводятся по схеме МКЦР (4) – (7). Операции метода итерирования подпространства $Y^T KY$ и $Y^T MY$ фактически сводятся к процедуре определения правых частей следующего приближения F , т. е. $KY^{(2)} = F^{(1)} = MY^{(1)}$.

При таком подходе осуществляется направленный поиск спектра нижних частот всей ЦСК, при этом число отыскиваемых частот подшипника качения зависит лишь от размерности итерируемого подпространства [13]. Процедура получения решения статической задачи ЦСК с различным нагружением секторов подшипника качения становится базовым модулем для динамических задач, а размерность системы разрешающих уравнений

определяется дискретной моделью одного сектора.

Колебания подшипников качения обуславливаются в основном деформациями его колец – с «узловыми диаметрами». Главные специфические особенности колебаний подшипников качения как ЦСК связаны с наличием в спектрах двукратных собственных частот.

Параметр цикличности j характеризует целое число волн перемещений на окружности колец ("узловые диаметры"). Отметим, что собственные формы, соответствующие $j=0$ и $j=N/2$ – одинарные, а соответствующие прочим j – кратные.

Отличительная черта группы собственных форм, соответствующих $j=0$ – синфазные колебания секторов подшипников качения с одинаковыми амплитудами. В группе форм колебаний с параметром цикличности $j=N/2$ также сектора совершают колебания с одинаковыми амплитудами, но соседние сектора колеблются в противофазе.

В остальных группах j собственные формы колебаний подшипников качения имеют более сложный вид. В зависимости от номера группы форма колебаний имеет несколько целых волн перемещений в окружном направлении, поэтому соседние пролеты между роликами имеют всегда разные амплитуды колебаний.

С увеличением j искаженные «узловые диаметры» все больше искривляются и располагаются на кольцах вдоль роликов. В силу сложности и связанности конструкции подшипников качения узловые линии сильно искривлены, что затрудняет экспериментальную идентификацию параметра j для соответствующей формы, особенно при их большом числе.

Идентификация собственных форм подшипников качения затруднена потому, что по числу всплесков на периферии не всегда можно определить параметр j . Собственные частоты подшипников качения обычно возрастают с ростом числа j .

Анализ чувствительности и условия оптимальности для поворотно-симметричных многокомпонентных конструкций (подшипников качения)

Анализ чувствительности многокомпонентных ЦСК специфичен тем, что полный набор варьируемых параметров \bar{y} определяется комплектом $\{\mu_i\}_{i=1}^r$, описывающим переменные проектирования отдельного сектора подшипника качения, а производные функционалов отыскиваются для целой поворотно-симметричной конструкции

$$\vec{\nabla}_u J = \left\{ \left(\frac{\partial J}{\partial \vec{y}}, \vec{y}'_{u_i} \right) + \frac{\partial J^a}{\partial u_i} = - \frac{\partial H^a}{\partial u_i} \right\}, \quad i = \overline{1, r}, \quad (8)$$

Вначале рассмотрим соотношения анализа чувствительности и условия оптимальности для случая статического нагружения КЭ модели (1). Производную от гамильтониана для задач статики

$$H = (K(\vec{u})\vec{y}, \vec{\psi}) - J(\vec{u}, \vec{y})$$

берем только по явно входящему параметру проектирования.

Введение вектора сопряженных переменных $\vec{\psi}$ для задач статики многокомпонентных конструкций при учете равенства $K^T = K$

$$K^T(\vec{u})\vec{\psi} = K(\vec{u})\vec{\psi} = \vec{g} = \vec{\nabla}_y J. \quad (9)$$

позволяет найти скалярное произведение в выражении (8) наиболее экономным образом:

$$\left(\frac{\partial J}{\partial \vec{y}}, \frac{\partial \vec{y}}{\partial u_i} \right) = -\vec{y}^T K_{u_i} \vec{\psi} + \vec{F}_{u_i}^T \vec{\psi} \quad (10)$$

Сопряженная задача (9) повторяет за исключением правой части структуру задачи статики подшипников качения $K\vec{y} = \vec{F}$.

Для ее решения приложим разработанный алгоритм (3) - (7), причем применяются матрицы, матричные разложения и промежуточные результаты ранее решенной задачи анализа ЦСК подшипников качения. Тогда градиент функционала задачи статики многокомпонентной поворотно-симметричной конструкции

$$\frac{\partial J}{\partial u_i} = \frac{\partial J^{aB}}{\partial u_i} + \sum_{j=1}^N \vec{y}_j^T (A_{1u_i} \vec{\psi}_j + A_{2u_i} \vec{\psi}_{j+1} + A_{3u_i} \vec{\psi}_{j-1}) + \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ju_i}^T \vec{\psi}_j, \quad (11)$$

где $\vec{\psi}_0 = \vec{\psi}_N$; $\vec{\psi}_{N+1} = \vec{\psi}_1$; $i = \overline{1, r}$.

Полная или частичная статическая конденсация внутренней области сектора многокомпонентной поворотно-симметричной конструкции принципиально не модифицирует методику решения. Формулировка (11) замыкает вместе с решением прямой и сопряженной задач проблему определения производных статических функционалов подшипников качения.

Представим в негативной формулировке отсутствия улучшающей вариации необходимые условия экстремума J (на выпуклом множестве U)

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \vec{u}} \right)_0^T \vec{u}_{opt} = \max_{\vec{u} \in \delta U \cap U} \left(\frac{\partial H}{\partial \vec{u}} \right)_0^T \vec{u}, ;$$

где $\left(\frac{\partial H}{\partial \vec{u}} \right)_0 = \frac{\partial H}{\partial \vec{u}}(\vec{u}_{opt}, \vec{y}_0, \vec{\psi}_0)$ - производная гамильтониана; \vec{y}_0 и $\vec{\psi}_0$ - решение исходной и сопряженной задач для \vec{u}_{opt} .

Запишем условия оптимальности в форме дискретного принципа максимума

$$H(\vec{u}_{opt}, \vec{y}_0, \vec{\psi}_0) = \max_{\vec{u} \in U} H(\vec{u}, \vec{y}_0, \vec{\psi}_0).$$

Для нерезонансных задач динамики ЦСК подшипников качения выражения для анализа чувствительности (11) отличаются только физическим значением матрицы коэффициентов, которая в данном случае является матрицей динамической жесткости $K_d = K - \omega^2 M$, где M – матрица масс, ω – частота вынуждающей силы.

Матричное уравнение колебаний соответственно для синусной (s) и косинусной (c) составляющих нагрузки приобретает вид:

$$[K(\vec{u}) - \omega^2 M(\vec{u})] \vec{y}_{c,s} = \vec{F}_{c,s}(\vec{u}). \quad (12)$$

Исходная и сопряженная задачи интегрального динамического функционала в этом случае не содержат особенностей, так как матрица динамической жесткости - невырожденная:

$$J = \int_0^T f(\vec{u}, \vec{y}_c \cos \omega t + \vec{y}_s \sin \omega t) dt = J(\vec{u}, \vec{y}_c, \vec{y}_s), \quad (13)$$

$$[K - \omega^2 M] \vec{\psi}_{c,s} = \vec{\nabla}_{c,s} J$$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}_c J &= \frac{\partial J}{\partial \vec{y}_c} \\ \vec{\nabla}_s J &= \frac{\partial J}{\partial \vec{y}_s}\end{aligned}\quad (14)$$

Выражение для гамильтониана и коэффициентов чувствительности с учетом квазициклической структуры потенциальных вариаций КЭ - матриц приобретают надлежащий вид:

$$\begin{aligned}H &= \sum_{c,s} \vec{\psi}_{c,s}^T [K - \omega^2 M] \vec{y}_{c,s} - \vec{\psi}_{c,s}^T \vec{F}_{c,s} - J \\ \vec{\nabla}_u J &= \left\{ -\frac{\partial H}{\partial u_i}, i = \overline{1, n} \right\}\end{aligned}\quad (15)$$

Нахождение функциональных производных многокомпонентных поворотно-симметричных конструкций состоит из ряда вычислительных задач, объем и точность решения которых не зависит от количества секторов и определяется размерностью исключительно отдельного сектора.

Рассмотрим случай изолированного простого резонанса (амплитудно - зависимое демпфирование и разреженный спектр собственных частот) ЦСК подшипников качения. Анализ чувствительности собственных частот или характеристик н.д.с., учитывая квазициклическую структуру допустимых вариаций КЭ – матриц, проводим в соответствии со следующими соотношениями

$$\begin{aligned}[K - \lambda M] \vec{y} &= \vec{0}, & \lambda &= \omega^2, & \vec{y}^T M \vec{y} &= 1 \\ [K - \lambda M] \vec{\psi} &= -\frac{\partial J}{\partial \vec{y}} \\ \vec{\nabla}_u J &= -\frac{\partial H}{\partial \vec{u}} + \frac{\partial \lambda}{\partial \vec{u}} \vec{\psi}^T M \vec{y} & \vec{\psi} &= k \vec{y} + \vec{\psi}_r \\ \frac{\partial \lambda}{\partial \vec{u}} &= \vec{y}^T [K' - \lambda M'] \vec{y}\end{aligned}\quad (16)$$

Штрихом обозначено явное дифференцирование по варьируемым переменным u_i . Наличие симметрии позволяет перевести задачу с наложенными условиями цикличности к анализу по модели отдельного сектора.

Задача анализа резонансного состояния подшипников качения в поле статических нагрузок, представляет собой матричную проблему

$$[K_{yy} + G(\bar{y}_s) - \lambda M_{yy}] \bar{y}_d = 0, \quad (17)$$

где $G(\bar{y}_s, \bar{u})$ - матрица приведенных начальных напряжений ("геометрической" жесткости), образующаяся на решении \bar{y}_s статической задачи (1). После дифференцирования (1) и (17) и введения сопряженных задач типа:

$$K \bar{\psi}_s = \frac{\partial (\bar{\psi}_d^T G \bar{y}_d)}{\partial \bar{y}_s}; \quad (18)$$

$$[K + G - \lambda M] \bar{\psi}_d = \frac{\partial J}{\partial \bar{y}_d} - \mu^* M \bar{y}_d$$

градиент резонансного функционала приобретает вид

$$\bar{\nabla}_u J = \left\{ J' - \mu^* \bar{y}_d^T M' \bar{y}_d + \bar{\psi}_d^T [K' + G' - \lambda M'] \bar{y}_d + \bar{\psi}_s^T (K' \bar{y}_s - \bar{F}' + \lambda \bar{\psi}_d^T M \bar{y}_d) \right\}_i.$$

Производная собственной частоты в этом случае выражается

$$\bar{\nabla} \lambda = \bar{y}_d^T [K' + G' - \lambda M'] \bar{y}_d + \bar{\psi}_{s\lambda}^T (K' \bar{y}_s - \bar{F}'),$$

где $\bar{\psi}_{s\lambda}$ - решение сопряженной статической проблемы, в которой $\bar{\psi}_d$ заменяется на \bar{y}_d .

Принципиальной особенностью динамики ЦСК подшипников качения является существование кратного резонанса, при котором определяются группы взаимосвязанных собственных форм, располагающих фиксированным числом волн деформаций. Анализ чувствительности систем осложняется принципиальной недифференцируемостью (в смысле Фреше) кратной собственной частоты в произвольной окрестности точки полного пространства переменных проектирования, "подозреваемой на оптимальность", однако дифференцируемостью (в смысле Гато) по направлению.

Соответствующий математический аппарат рассмотрим для кратности 2 с потенциалом распространения на случаи более высокой кратности основополагающих результатов.

Пусть \vec{y}_1 и \vec{y}_2 - два взаимно ортогональных, нормированных вектора, отвечающих кратному собственному значению

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda.$$

При этом пространство решений исходной задачи

$$[K - \lambda M] \vec{y} = \vec{0}, \quad (19)$$

включает два произвольных параметра

$$\vec{y} = \gamma_1 \vec{y}_1 + \gamma_2 \vec{y}_2 = A(\vec{y}_1 \cos \varphi + \vec{y}_2 \sin \varphi),$$

характеризующих норму собственного вектора A и его поворот φ в подпространстве собственных форм. Для определенности \vec{y}_1 и \vec{y}_2 помимо условий ортогональности и нормировки

$$\vec{y}_j^T M \vec{y}_i = \delta_{ij} : i, j = 1, 2$$

надо зафиксировать “угловое” положение одной из мод

$$\vec{n}^T M \vec{y}_1 = 0 \quad (20)$$

Анализ возмущенной $(\vec{u} + \delta \vec{u})$ системы уравнений (19) приводит к соотношению для “расщепления” кратного собственного значения

$$\delta \lambda_{1,2} = 0.5 (\alpha_{11} + \alpha_{22} \pm \sqrt{(\alpha_{11} - \alpha_{22})^2 + \alpha_{12}^2}), \quad (21)$$

где $\alpha_{ij} = \vec{y}_i^T (\delta K - \lambda \delta M) \vec{y}_j$,

$$\delta M_{r,s} = \delta \vec{u}^T \vec{\nabla}_u M_{r,s},$$

$$\delta K_{r,s} = \delta \vec{u}^T \vec{\nabla}_u K_{r,s}.$$

Совместное решение исходной (19) и сопряженных задач

$$[K - \lambda M] \vec{\psi}_{1,2} = \frac{\partial J}{\partial \vec{y}_{1,2}}$$

приводит к условиям

$$\bar{y}_i^T \frac{\partial J}{\partial \bar{y}_j} = 0 \quad \square.$$

Полные соотношения для производной ∇J в подпространстве кратных мод формируются суммированием однотипных выражений

$$\bar{\nabla}_u J = -\frac{\partial H}{\partial \bar{u}} + \frac{\partial \lambda}{\partial \bar{u}} \bar{\psi}^T M \bar{y}$$

и располагают фильтрующим свойством к общей части сопряженных решений:

$$\begin{aligned}\bar{\psi}_1 &= \gamma_{11} \bar{y}_1 + \gamma_{12} \bar{y}_2 + \bar{\psi}_1^*, \\ \bar{\psi}_2 &= \gamma_{21} \bar{y}_1 + \gamma_{22} \bar{y}_2 + \bar{\psi}_2^*\end{aligned}$$

Отметим, что отклонения конструктивно-технологических параметров подшипников качения при производстве и эксплуатации носят случайный характер и сложны для обнаружения. Их можно условно расчленить на 2 разновидности:

1) конструкция, повернутая относительно оси вращения на произвольный угол, кратный $2\pi/N$, сохранит инвариантность собственных физических и геометрических параметров (т. е. свойства циклической симметрии) - регулярные погрешности;

2) нарушается свойство строгой циклической симметрии - нерегулярные погрешности.

При анализе чувствительности собственных частот и резонансных характеристик ЦСК, зависящих от собственных форм, имеется принципиальное отличие. В первом видоизменении соответствующие вариации M и K располагают квазициклической структурой, при этом сохраняются выражения для производных по Фреше, выполняется условие нерасщепления спектра

$$\delta\lambda_1 = \delta\lambda_2 = \delta\lambda,$$

что накладывает на вариацию переменных проектирования дополнительные ограничения

$$\alpha_{11} = \alpha_{22}, \quad \alpha_{12} = 0.$$

Принципиальным следствием в подпространстве \bar{y} кратного резонанса является сохранение однозначной линейной связи между $\delta\bar{y}$, $\delta\lambda$ и $\delta\bar{y}$.

При второй разновидности происходит нарушение симметрии, расщепление кратного спектра, "привязка" в окружном направлении форм. Вариации собственных частот и мод колебаний характеризуются нелинейными соотношениями (21). При вынужденных колебаниях происходит повышение динамической нагруженности (перегрузка) подшипниковых узлов качения.

Как видно, из соотношений анализа чувствительности собственных частот или характеристик н.д.с. подшипниковых узлов качения вычисление производных от критерия оптимизации (или функционалов в постановке Парето) и функциональных ограничений включает не только дифференцирование уравнений состояния, но и соотношения для градиентов от конечноэлементных матриц ЦСК.

Перспективным представляется разработанный подход, в рамках которого на первом этапе после решения исходной и сопряженных конечноэлементных проблем выполняется анализ чувствительности функционалов к возмущению естественных варьируемых параметров конечноэлементной дискретизации конструкции, а на втором этапе (там, где этого требует решение перечисленных выше проблем) осуществляется переход к анализу чувствительности в специальном пространстве конструктивных форм, определяемом конструктивными и технологическими особенностями, в котором и решается реальная задача оптимального проектирования [8].

Для дифференцирования матриц жесткости и масс по координатам узловых точек объемного изопараметрического конечного элемента можно записать следующие соотношения:

$$\frac{d[K^e]}{dx_{il}} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\frac{dB^T}{dx_{il}} DB \det[J] + B^T D \frac{dB}{dx_{il}} \det[J] + B^T DB \frac{d \det[J]}{dx_{il}} \right) d\xi d\eta d\zeta$$

$$\frac{d[M^e]}{dx_{il}} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N^T \rho N \frac{d \det[J]}{dx_{il}} d\xi d\eta d\zeta,$$

где D - матрица коэффициентов свойств материалов; B - матрица связи узловых перемещений и деформаций; N - матрица функций формы по локальным координатам; J - матриц Якоби.

Список литературы

1. Высокотехнологичный компьютерный инжиниринг: обзор рынков и технологий / научный редактор К. В. Дорофеев, руководитель группы В. Н. Княгинин. – СПб.: Изд-во Политехн. Ун-та, 2014. – 110 с.
2. Заблоцкий В. Ю. Влияние технологической наследственности на формирование показателей качества подшипников / В. Ю. Заблоцкий, В. І. Марчук // Міжвузівський збірник "Наукові нотатки". – Луцьк, 2011. – Випуск №31. – С. 129-133.
3. Заблоцкий В. Ю. Про вплив технологічної спадковості на експлуатаційні характеристики кілець роликотішипників /В. Ю. Заблоцкий // Міжвузівський збірник "Наукові нотатки". – Луцьк, 2004. – Випуск № 15. – С. 91-100.
4. Марусенко С. І. Аналіз статико–динамічних нелінійних процесів у елементах структурно зв'язаних систем / С. І. Марусенко, С. О. Назаренко, Е. А. Сімсон // Зб. наук. пр. Академії внутрішніх військ МВС України. — 2010. — № 1 (15). — С. 65–75.
5. Назаренко С. А. Анализ чувствительности конструкций при воздействии физических полей различной природы / С. А. Назаренко // Вестн. Нац. техн. ун-та «ХПИ» : сб. науч. тр. / Нац. техн. ун-т «Харьк. политехн. ин-т». — 2006: Динамика и прочность машин. — № 32. — С. 119–122.
6. Назаренко С. А. Математические модели мультифизического анализа конструкций для CALS технологий / С. А. Назаренко // Вестн. Нац. техн. ун-та «ХПИ» : сб. науч. тр. : темат. вып. / Нац. техн. ун-т «Харьк. политехн. ин-т». — Харків : НТУ «ХП», 2008. — № 47 : Динамика и прочность машин. — С. 125–132.
7. Назаренко С. А. Многодисциплинарный анализ чувствительности для исследования жизненного цикла изделия / С. А. Назаренко // Физические и компьютерные технологии : тр. 11-й Междунар. научно–технической конф. — Харьков, 2005. — С. 29–34.
8. Назаренко С. А. Разработка технологии оптимизации нагруженных многокомпонентных конструкций и технологических систем [Электронный ресурс] / С. А. Назаренко. — Электронный репозиторий Национального технического университета «Харьковский политехнический институт». — Электрон. текстовые данные. — Харьков, 2016. — 36 с. — Режим доступа: <http://repository.kpi.kharkov.ua/handle/KhPI-Press/22751>.
9. Симсон Э. А. Холодная раскатка заготовок подшипниковых

колец / Э. А. Симсон, В. В. Овчаренко, В. И. Демидов, С. А. Назаренко // Вестн. Нац. техн. ун-та «ХПИ» : сб. науч. тр. : темат. вып. / Нац. техн. ун-т «Харьк. политехн. ин-т». — Харьков : НТУ «ХПИ», 2011. — № 52 : Динамика и прочность машин. — С. 156–160.

10. Технологическая наследственность в машиностроительном производстве: монография / под ред. А. М. Дальского. — М.: Изд-во МАИ, 2000. — 364 с.

11. Nazarenko S. A. Most important phases of development optimization of complex structure / S. A. Nazarenko // Bulletin of NTU "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines. — Kharkiv: NTU "KhPI", 2015. — № 57 (1166). — P. 87-90. doi: 10.20998/2078-9130.2015.57.72583.

12. Simson E. A. A method of the analysis and optimization of construction elements of the technological systems / E. A. Simson, S. A. Nazarenko, I. D. Prevo // Bulletin of NTU "KhPI". Series: Technologies in mechanical engineering. — Kharkiv : NTU "KhPI", 2014. — № 42 (1085). — P. 187-192.

13. Simson E. A. Strength and dynamic analysis multicomponent cyclically symmetric structures (rolling bearings) / E. A. Simson, S. A. Nazarenko // Bulletin of NTU "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines. — Kharkiv: NTU "KhPI", 2016. — № 26 (1198). — P. 71-74. doi: 10.20998/2078-9130.2016.26.79933.

14. Симсон Э. А. Оптимизация в проектировании: теории и приложения / Э. А. Симсон, С. А. Назаренко // Инфиз: очерки истории творчества. — Харьков : ЭнергоКлуб Украины, 2005. — С. 329–345.

15. Bogomolov S. I. Application of a superparametric finite shell element to the calculation of turbine blade vibrations / S. I. Bogomolov, S. S. Lutsenko, S. A. Nazarenko // Strength of Materials. — 1982. — Vol. 14. — № 6. — P. 796–799. doi:10.1007/BF00769780.

Keywords: анализ чувствительности, динамика, многокомпонентные конструкции, оптимизация, подшипники качения, mechanics, cyclically symmetric structure, finite element method, rolling bearing, reduced order modeling techniques, optimization.

В работе разработаны модели для анализа динамического состояния и оптимизации многокомпонентных конструкций (подшипниковых узлов качения). Приведена классификация подходов к решению задач оптимизации многокомпонентных структур с учетом технологической наследственности,

возникающей при их изготовлении (на примере подшипников качения). Исследованы проблемы определения производных функционалов и необходимые условия экстремума поворотно-симметричных конструкций (подшипников качения) для случаев статического нагружения, изолированного простого резонанса, резонансного состояния в поле статических нагрузок, кратных собственным значениям.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Назаренко Сергей Александрович – кандидат технических наук, НТУ «ХПИ», тел.: (057) 700-29-72; e-mail: nazarenko_serzh@mail.ua.

Nazarenko Sergej Aleksandrovich – Candidate of Technical Sciences, Senior Staff Scientist, National Technical University «KhPI», Department of Strength of Materials, tel.: (057) 700-29-72; e-mail: nazarenko_serzh@mail.ua.